Topologia
Lista 5 (spójność)

Zad 1. Pokazać, że dla przestrzeni topologicznej X następujące warunki są równoważne:

a) przestrzeń X nie jest sumą dwu rozłącznych, niepustych zbiorów otwartych,

b) jedynymi podzbiorami domknięto-otwartymi w X są $\emptyset$ oraz X,

c) jeśli $X = X_1 \cup X_2$ i zbiory X_1, X_2 są rozgraniczone, to znaczy
$$\overline{X}_1 \cap X_2 = \emptyset \qquad \wedge \qquad X_1 \cap \overline{X}_2 = \emptyset,$$
to jeden z nich jest pusty,

d) każde przekształcenie ciągłe $f : X \to D$ przestrzeni X w przestrzeń dyskretną D posiadającą conajmniej dwa elementy, jest stałe.

Zad 2. Które z następujących podzbiorów płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ są niespójne:
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = (1-e^{-t})\cos t, y = (1-e^{-t})\sin t,\ t \in [0,\infty),\ \text{lub } x^2+y^2 = 1\},$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = (1+e^{t})\cos t, y = (1+e^{t})\sin t,\ t \in [0,\infty),\ \text{lub } x^2+y^2 = 1\}$$
$$C = (0,2)^2 \setminus \{1\} \times \mathbb{R}, \qquad D = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x \in \mathbb{Q} \wedge y \in Q\},$$
$$E = \partial\left[[0,4]^2 \setminus (1,2)\times(2,3)\right], \qquad F = \partial\left[[0,4]^2 \setminus \Big((1,2)\times(2,3) \cup (2,3)\times(0,2)\Big)\right]$$

Zad 3. Pokazać, że podzbiór A prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych liczb $a, b \in A$ takich, że $a < b$ każda liczba $c \in (a,b)$ należy do zbioru A.

Zad 4. Opisać wszystkie zbiory spójne na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$.

Zad 5. Które z podanych przestrzeni są spójne:

a) przestrzeń dyskretna,

b) przestrzeń antydyskretna,

c) przestrzeń (N, τ), gdzie $\tau = \{A \subset \mathbb{N} :\ \text{zbiór } \mathbb{N} \setminus A \text{ jest skończony lub } A = \emptyset\}$

d) prosta $\mathbb{R}$ z topologią $\tau_{[)}$ zadaną przez bazę $\mathcal{B} = \{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Zad 6. Wykazać, że przy odwzorowaniu ciągłym obraz zbioru spójnego jest zbiorem spójnym.

Zad 7. Udowodnić, że każda przestrzeń metryczna spójna jest jednoelementowa lub ma moc niemniejszą niż continuum.

Zad 8. Wykazać twierdzenie Cantora, które mówi, że jeżeli $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset ...$ jest zstępującą rodziną domkniętych podzbiorów zwartej przestrzeni X, to
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$
Pokazać na przykładzie, że założenia o zwartości przestrzeni X w tezie tego twierdzenia nie można opuścić.

Zad 9. Spójną oraz zwartą przestrzeń metryczną nazywa się contiuum. Udowodnić, że przekrój zstępującego ciągu continuów również jest continuum.